❷

On considère deux jetons J_1 et J_2, équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).

Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1.

Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.

Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.

On note E l'événement « le jeton J_1 est choisi pour le jeu » et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».

Partie 1 : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve.

1) a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.

b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.
On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(X = n)$.

b) En déduire que $P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?

3) a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(Y = n)$.

b) En déduire que $P(Y = 0) = 0$.

4) On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire S par : $\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \mathrm{Max}(X(\omega), Y(\omega))$.

a) Déterminer $S(\Omega)$.

b) Montrer que $P(S = 1) = P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$.

c) Pour tout entier n supérieur ou égal 2, comparer d'une part $(X = n)$ et $(Y < n)$ et d'autre part $(Y = n)$ et $(X < n)$, puis en déduire que : $(S = n) = (X = n \cup Y = n)$.

d) Reconnaître alors la loi de S

5) On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire I par : $\forall \omega \in \Omega,\ I(\omega) = \mathrm{Min}(X(\omega), Y(\omega))$.

a) Montrer que I est une variable de Bernoulli.

b) Déterminer $P(I = 0)$ puis donner la loi de I, ainsi que son espérance et sa variance.

Bcpst 1 **DS n°8** **2005/06**

Un résultat préliminaire, qui pourra servir pour les exercices 1 et 2

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$, une suite à termes positifs ou nuls.
Pour tout $n\geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Si la suite $(S_n)_{n\geq 1}$, admet une limite S quand n tend vers $+\infty$, on pose $S=\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

a/ Si $x\in]0,1[$, montrer que : $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$.

b/ Si $x\in]0,1[$, calculer $\sum_{k=3}^{+\infty} x^k = \frac{x^3}{1-x}$

❶

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de "*Pile*" et de "*Face*" sont équiprobables. Les différents lancers étant indépendants les uns des autres.

Notations : Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par
- F_n l'événement "*Face apparaît au lancer de rang n*"
- P_n l'événement" *Pile apparaît au lancer de rang n*".

Le jeu :
Deux joueurs A et B s'affrontent dans le jeu dont les règles sont les suivantes :
- le joueur A est gagnant si la configuration " *Pile, Pile, Face* " apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration " *Face , Pile, Pile* " n'apparaisse ;
- le joueur B est gagnant si la configuration " *Face , Pile, Pile* " apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration " *Pile, Pile, Face* " n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

L'objectif :
On se propose de prouver que le joueur B possède un **net** avantage sur le joueur A.

PARTIE I.

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par D_n l'événement " *lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux "Pile" consécutifs*" et par d_n sa probabilité.

1. Dessinez un arbre modélisant les trois premiers lancers.
2. En déduire que $d_1 = 1$ et $d_2 = \frac{3}{4}$ et calculez la valeur de d_3.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel non nul. Justifiez l'égalité
$$D_{n+2} = (D_{n+1} \cap F_1) \cup (D_n \cap P_1 \cap F_2)$$
et en déduire pour tout entier naturel n non nul, la relation de récurrence suivante :
$$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.$$
4. Démontrez par récurrence double que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n \leq 2\left(\frac{6}{7}\right)^n$$
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$. Montrez que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, majorée par 12 et en déduire la convergence de cette suite.

6. Justifiez, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$S_{n+2} = \frac{1}{2}S_{n+1} + \frac{1}{4}S_n + \frac{5}{4}$$

En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = 5.$$

PARTIE II. La partie s'arrête presque sûrement par la victoire de l'un des joueurs

Etant donné un entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par

- C_n l'événement : "A l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer aucun des deux joueurs n'a gagné et le jeu se poursuit" ;
- T_n l'événement : " A l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer l'un des deux joueurs est déclaré gagnant"

1. Calculez les probabilités des événements T_1, T_2 et T_3.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Justifiez l'égalité

$$P(C_n) = \frac{1}{2^n} + d_n$$

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Exprimez l'événement T_n à l'aide des événements C_{n-1} et C_n. En déduire l'égalité :

$$P(T_n) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n.$$

4. ~~Démontrez la convergence de la série et~~ calculez la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} P(T_n)$ et montrez que la probabilité que le jeu se termine par la victoire de l'un des joueurs est égale à 1.

PARTIE III. Le jeu n'est pas équitable

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note

- A_n l'événement " *le joueur A est déclaré gagnant à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer*" ;
- a_n la probabilité de A_n ;
- B_n l'événement " *le joueur B est déclaré gagnant à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer*" ;
- b_n la probabilité de B_n ;

1. Calculez a_3 et a_4.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Explicitez la suite des résultats des n premiers lancers pour que le joueur A soit déclaré gagnant à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer.
En déduire l'égalité suivante :

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. Exprimez l'événement A est remporte la partie en fonction de A_n et calculez la probabilité que le joueur A soit déclaré gagnant.

4. En déduire la probabilité que le joueur B soit déclaré gagnant et conclure.